



Activités sur les lois de Képler – Correction en directe.

I. Comment démontrer que le mouvement d'un satellite est uniforme dans l'approximation d'un mouvement circulaire ?

Enoncé n° 1 : Antilles-Guyane septembre 2013 « De Hubble à James Webb »

Première partie : étude de l'orbite du télescope spatial Hubble

On étudie le système {télescope spatial Hubble} dans le référentiel géocentrique en négligeant l'interaction gravitationnelle du Soleil avec le télescope.

1.1. Quelle est la trajectoire du télescope Hubble dans ce référentiel ?

1.2. À partir de la deuxième loi de Newton, montrer que, dans l'approximation d'une trajectoire circulaire, le mouvement du télescope Hubble est uniforme.

Méthode n°1 : Utilisation de la deuxième loi de Newton.

Référentiel : géocentrique supposé galiléen.

Système : télescope de masse m .

Bilan des forces : Force gravitationnelle \vec{F}

direction radiale ; sens : centripète ; norme : $F = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{(R_T+h)^2}$

Application de la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$G \cdot \frac{m \cdot M_T}{(R_T+h)^2} \cdot \vec{u} = m \cdot \vec{a} \quad (\vec{u} : \text{vecteur unitaire centripète})$$

$$G \cdot \frac{M_T}{(R_T+h)^2} \cdot \vec{u} = \vec{a}$$

Dans le repère de Frenet (O, \vec{n} , $\vec{\tau}$) :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{(R_T+h)} \cdot \vec{n} + \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}$$

$$G \cdot \frac{M_T}{(R_T+h)^2} \cdot \vec{u} = \frac{v^2}{(R_T+h)} \cdot \vec{n} + \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} \quad \text{avec } \vec{u} = \vec{n} \text{ (c'est-à-dire que l'accélération n'a pas de composante sur } \vec{\tau} \text{)}$$

Alors $\frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} = \vec{0}$ donc la vitesse du satellite est constante.

Le mouvement du satellite est circulaire uniforme.

II. Vitesse et période d'un corps en mouvement circulaire uniforme.

Énoncé n° 2 : « Un trou noir au centre de la Galaxie »

La traque du trou noir en infrarouge.

Certaines étoiles très proches du centre galactique sont suivies depuis plusieurs années par une équipe internationale.

La chance a voulu que d'une part l'une des étoiles surveillées - dénommée S2 - est passée au plus proche du centre de masse durant cette période et que, d'autre part, cette approche s'est faite à une distance remarquablement petite : seulement 17 heures-lumière.

Le fait que la trajectoire soit restée purement képlérienne a ainsi permis d'éliminer définitivement toute possibilité que la masse de quelques millions de masses solaires soit sous forme d'un amas dense stellaire sombre. En effet la taille de toutes ces structures est bien plus grande que les 17 heures-lumière de la distance d'approche. Seule reste la possibilité du trou noir très massif.

Estimation de la masse du trou noir.

Pour déterminer un ordre de grandeur de la masse M du trou noir, on considère dans cette question que l'étoile S2, de masse m , décrit une orbite circulaire de rayon $r = 132$ heures-lumière, la période de révolution étant $T = 15,2$ ans.

3.1. Montrer à l'aide de la deuxième loi de Képler que la vitesse de l'étoile est uniforme.

3.2. Montrer que la valeur v de la vitesse de l'étoile S2 a pour expression $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$

3.3 En déduire l'expression de la période de révolution T de l'étoile.

3.4 Déterminer la valeur de la masse M du trou noir et la comparer à celle annoncée dans le document 1.

Données : constante de gravitation universelle $G = 6,67 \times 10^{-11}$ u.S.I.

3.1. Utilisation de la deuxième loi de Képler.

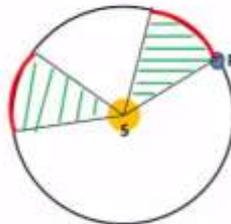
> Mouvement circulaire

Une planète ou un satellite en mouvement circulaire a nécessairement un mouvement uniforme

Démonstration : à l'aide de la deuxième loi de Kepler

D'après la deuxième loi de Kepler, les deux aires balayées (en vert) et donc les arcs de cercle décrits (en rouge) pendant des durées égales sont égaux.

Ces arcs de cercle sont donc décrits à la même vitesse, le mouvement est uniforme.



3.2. $\vec{a} = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{n}$ dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme et $\vec{a} = G \cdot \frac{M}{r^2}$

Ainsi on peut écrire $a_E = \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M}{r^2}$ alors $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$

3.3. On a $v = \frac{2\pi r}{T}$ alors $T = \frac{2\pi r}{v}$

Avec l'expression $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ on en déduit que $T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}}$ soit $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$

3.4. Estimation de la masse du trou noir.

A partir de l'expression précédente on retrouve la troisième loi de Képler : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$

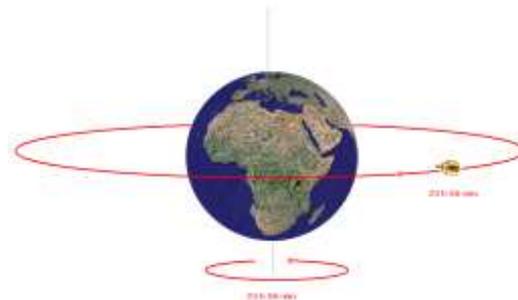
Alors $M = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$ soit $M = \frac{4\pi^2 \times (132 \times 3600 \times 3,00 \times 10^8)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times (15,2 \times 365,25 \times 24 \times 3600)^2} = 7,45 \times 10^{36}$ kg

III. A quelle altitude tourne un satellite géostationnaire ?

La période de révolution étant égale à la période de rotation de la Terre autour de son axe, sa valeur est égal au jour sidéral, soit 23 h 56 min 4 s
 $T = 23,934 \times 3\,600 = 86164 \text{ s}$.

Le rayon orbital est égal à $R = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{86164^2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 5,98 \times 10^{24}}{4\pi^2}} = 42\,000 \text{ km}$.

$h = R - R_T = 42\,000 - 5\,980 = 35\,620 \text{ km}$.



IV. Un intrus se cache dans la liste suivante. Lequel est-ce ?

Satellite de Jupiter	Période de révolution du satellite autour de Jupiter (s)	Distance du satellite à Jupiter (m)	$\frac{T^2}{a^3}$
Io	$1,53 \times 10^5$	$4,22 \times 10^8$	$3,11 \times 10^{-16}$
Europe	$3,07 \times 10^5$	$6,71 \times 10^8$	$3,12 \times 10^{-16}$
Ganymède	$6,19 \times 10^5$	$1,07 \times 10^9$	$3,13 \times 10^{-16}$
Callisto	$1,44 \times 10^6$	$1,88 \times 10^9$	$3,12 \times 10^{-16}$

Pour les satellites de Jupiter, le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est constant et égal à environ $3,12 \times 10^{-16}$ S.I.

Pour les satellites d'une autre planète, le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est également constant mais sa valeur sera différente.

La valeur du rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est caractéristique de l'astre central autour duquel tourne les planètes ou satellites.

Satellite intrus (de Saturne)	Période de révolution du satellite	Distance du satellite à Jupiter (m)	$\frac{T^2}{a^3}$
Encelade	$1,18 \times 10^5$	$2,38 \times 10^8$	$1,03 \times 10^{-15}$