Thème : Effectuer des bilans d'énergie sur un système
Cours 26 : Le premier principe de la thermodynamique
(version professeur)

B.O. Énergie interne d'un système. Aspects microscopiques.
Premier principe de la thermodynamique. Transfert thermique, travail.
Capacité thermique d'un système incompressible. Énergie interne d'un système incompressible.
Modes de transfert thermique. Flux thermique. Résistance thermique.
Bilan thermique du système Terre-atmosphère. Effet de serre.
Loi phénoménologique de Newton, modélisation de l'évolution de la température d'un système au contact d'un thermostat.

I. Energie interne *U* d'un système. Aspects microscopiques.

L´énergie interne est d'origine microscopique. Elle dépend des propriétés individuelles des molécules. L´énergie interne est une énergie désordonnée.

Elle ne dépend que de paramètres traduisant les propriétés microscopiques des molécules :

- La température traduit l'agitation thermique des molécules.
- La pression traduit les chocs contre la paroi.

Il existe différents types d'énergie interne :

- L'énergie cinétique d'agitation des molécules.
- L'énergie d'interaction entre les molécules.
- L'énergie de rotation des molécules sur elles-mêmes.
- L'énergie de vibration des molécules.
- …

II. Premier principe de la thermodynamique. Transfert thermique, travail.

1. Premier principe de la thermodynamique. Notions de transfert.

Le premier principe de la thermodynamique dit que l'énergie de l'Univers est constante. L'énergie totale ne varie pas.

$E_T = E_c$ (énergie cinétique) + E_P (énergie potentielle) + E_e (énergie électrique) + E_m (énergie magnétique) + $E_{méca}$ (énergie mécanique) +… + U (énergie interne d'un système.

Dans l'étude thermodynamique, on va s'intéresser à la variation d'énergie interne ΔU qui peut toutefois être étudié avec d'autres formes d'énergie.

Notion de système :

- Un système ouvert échange de la matière et de l'énergie avec le milieu extérieur.
- Un système fermé échange de l'énergie avec le milieu extérieur.
- Un système **isolé** n'échange **ni matière ni énergie** avec le milieu extérieur.

Pour un système isolé c'est-à-dire sans interaction avec le milieu extérieur, l'énergie est constante.
Quand un système non isolé évolue, il échange de l'énergie avec l'extérieur sous forme de chaleur et/ou sous forme de travail.

On considère un système quelconque qui subit une transformation le menant d'un état A à un état B.
La conservation de l'énergie donne $\Delta U = U_B - U_A$ = [énergie reçue par le système entre A et B]
On peut écrire alors $\boldsymbol{\Delta U = W + Q}$ ***W*** est le travail reçu ***Q*** est la chaleur reçue

Si l'énergie reçue **ΔU est positive**, **le système reçoit** vraiment de l'énergie.
Si l'énergie reçue **ΔU est négative**, **le système cède** de l'énergie.

Dans une étude purement mécanique $Q = 0$, il n'y a pas échange de chaleur. $\Delta U = W$.
Dans une étude purement thermique $W = 0$, $\Delta U = Q$

Si $Q = 0$ et $W = 0$, alors $\Delta U = U_2 - U_1 = 0$. Le système à l'équilibre thermique.

III. Capacité thermique d'un système incompressible. Énergie interne d'un système incompressible.

1. La calorimétrie est la mesure des quantités de chaleur.

Lorsqu'un état est condensé comme un liquide ou un solide, la variation d'énergie interne est proportionnelle à la variation de température.

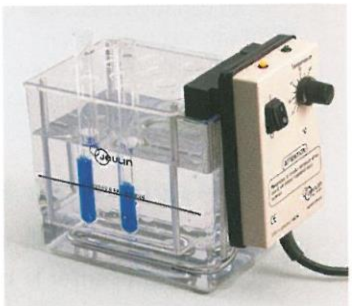
$\boldsymbol{\Delta U = C \times \Delta T}$
C est la capacité thermique du corps. Elle s'exprime en Joule par Kelvin ($J.K^{-1}$)
Application : le calorimètre.

On peut également utiliser la capacité thermique massique c d'un corps. Elle s'exprime en $J.kg^{-1}.K^{-1}$
$\boldsymbol{\Delta U = m \,.\, c \,.\, \Delta T}$
Cette relation traduit les échanges thermiques entre un corps de masse m et le milieu extérieur.

La capacité thermique est l'énergie thermique que doit recevoir le corps pour élever sa température d'un kelvin.
Exemple : capacité thermique de l'eau $c_{eau} = 4180\ J.K^{-1}.kg^{-1}$
Il faut apporter 4 180 J pour élever 1 kg d'eau d'un Kelvin.

<u>Question</u> : Calculer la variation interne du volume d'eau chauffée.

Un bain-marie utilisé en chimie contient 1,7 L d'eau initialement à une température $T_1 = 20\ °C$.
Au bout de quelques minutes, la résistance chauffante du bain-marie permet d'obtenir ce même volume d'eau à une température $T_2 = 64\ °C$.



$c_{eau} = 4180\ J.K^{-1}.kg^{-1}$
$\rho_{eau} = 1,00\ kg.L^{-1}$

<u>Réponse</u> :

La variation d'énergie interne de la masse m d'eau est liée à sa variation de température par :

$$\Delta U = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1)$$

La masse m se calcule à partir de la masse volumique :

$$m = V_{eau} \cdot \rho_{eau}$$

donc : $\Delta U = V_{eau} \cdot \rho_{eau} \cdot c \cdot (T_2 - T_1)$

AN : $\Delta U = 1{,}7 \times 1{,}00 \times 4{,}18 \times 10^3 \times (64 - 20) = 3{,}1 \times 10^5\ J$.
L'énergie interne de ce volume d'eau a augmenté de $3{,}1 \times 10^5\ J$.

Remarque : il n'est pas nécessaire de convertir les degrés Celsius en Kelvin.

2. Expérience historique de Joule sur les transferts énergétiques.

   Vidéo : EPFL. Expériences sur les transferts thermiques et mécaniques. Durée 3 min 40 s (0 à 3 min 40s) ou plus si approfondissement.
   https://www.youtube.com/watch?v=VuezeFtYNxY

IV. Les différents modes de transferts thermiques.

I. Transferts thermiques.

1. Irréversibilité des transferts thermiques :

   L'irréversibilité fixe le sens des transferts thermiques. Le transfert thermique s'effectue toujours du plus chaud vers le plus froid.

Chaud

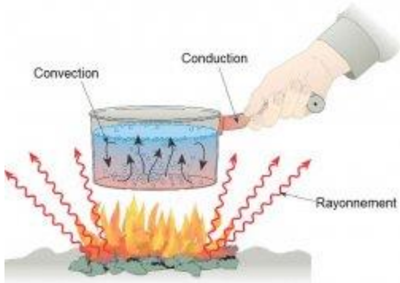
Froid

Tiède

Les frottements, la diffusion et les turbulences sont des causes de l'irréversibilité.
L'irréversibilité des transferts thermiques entraîne des baisses de rendement des machines thermiques, tels que les moteurs de voiture.

2. Les différents modes de transferts thermiques.

   Lors d'un transfert thermique, il apparaît une variation de température.



a. Comment peut s'effectuer un transfert thermique ?

- Par conduction :
  C'est un transfert par contact dans un matériau ou à l'interface entre 2 milieux.
  L'énergie des particules se communique de proche en proche.

- Par convection :
  Ce sont les mouvements d'ensemble de fluides (gaz ou liquide) dus à des différences de densité (radiateurs électriques).
  La convection joue un rôle très important dans le mouvement des masses d'air et le climat.

- Par rayonnement :
  Un corps rayonne de l'énergie, c'est un transfert sans contact physique.
  Le rayonnement dépend de la température du corps.

V. Flux thermiques et résistances thermiques.

1. Définition du flux thermique Φ.

Le flux thermique est l'énergie thermique transférée Q à travers une paroi pendant une durée Δt.

$$\Phi = \frac{Q}{\Delta t}$$

Φ en watt (W) — Q en joule (J) — Δt en seconde (s)

Le transfert s'effectue toujours du chaud vers le froid.

2. Définition de la résistance thermique R_{th}.

Il existe une analogie entre la résistance thermique Φ et la résistance électrique R.

La relation entre la différence de potentiel $U_{AB} = V_A - V_B$ et l'intensité I est $V_A - V_B = RI$

La relation entre la différence de température et le flux thermique $T_{chaud} - T_{froid} = R_{Th}\Phi$

$$\Phi = \frac{T_{chaud} - T_{froid}}{R_{th}}$$

ou

$$R_{th} = \frac{T_{chaud} - T_{froid}}{\Phi}$$

R_{th} s'exprime en $K.W^{-1}$

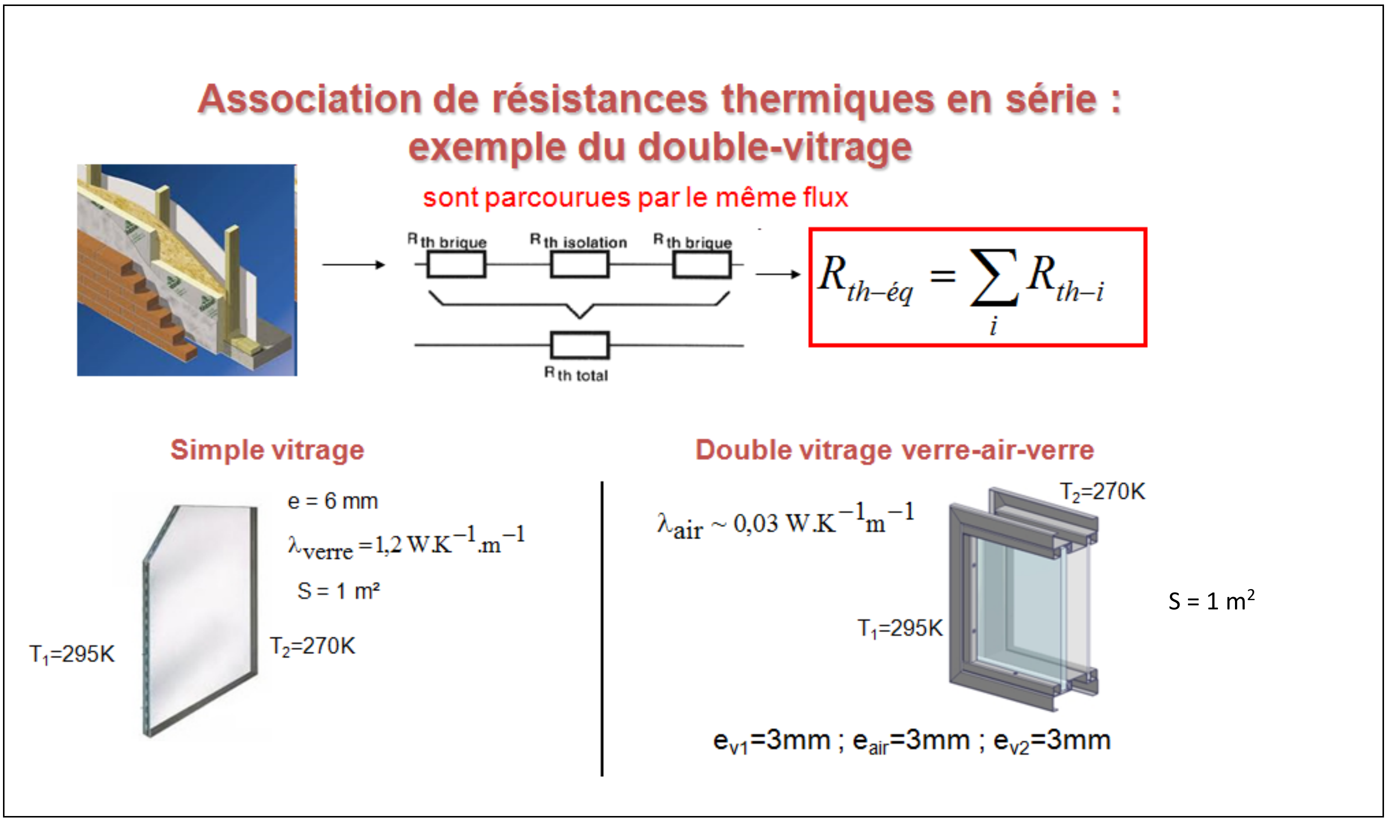
Pour un même écart de température, plus la résistance thermique de la paroi est grande, plus le flux est faible.

3. Cas d'une paroi plane d'épaisseur e, de surface S, de résistance thermique R_{th} et dont le matériau a une conductivité thermique λ.

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda \cdot S}$$

e en mètre (m) — S en mètre carré (m^2) — λ en $W.m^{-1}.K^{-1}$ — R_{th} en $K.W^{-1}$

Document (Source Académie de Limoges).



Questions : A partir du document ci-dessus :

Calculer la résistance thermique R_{th1} et le flux thermique Φ_1	Calculer la résistance thermique R_{th2} et le flux thermique Φ_2

Réponses :

$R_{th1} = 5 \times 10^{-3}$ K.W^{-1}
Φ_1 = 5 kW !!!
$R_{th2} = 1{,}05 \times 10^{-1}$ K.W^{-1}
$\Phi_2 \sim$ 250 W soit 20 fois moins que Φ1

VI. Bilan thermique du système Terre-atmosphère. Effet de serre. (DM)

- Effectuer un bilan quantitatif d'énergie pour estimer la température terrestre moyenne, la loi de Stefan-Boltzmann étant donnée. Comparer à la valeur réelle de la température terrestre : 15°C.
- Discuter qualitativement de l'influence de l'albédo et de l'effet de serre sur la température terrestre moyenne.

Sources ENS LYON
https://planet-terre.ens-lyon.fr/planetterre/objets/Images/td-effet-de-serre/td-effet-de-serre-doc01.pdf
https://planet-terre.ens-lyon.fr/article/bilan-radiatif-terre1.xml#corps-noir
http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/CorpsNoir_Climat.xml

Document 1 : Loi de Stephan.

La loi de Stefan le flux thermique émis par un corps à la température T de ce corps : $\boldsymbol{F_{émis} = \sigma \cdot T^4}$

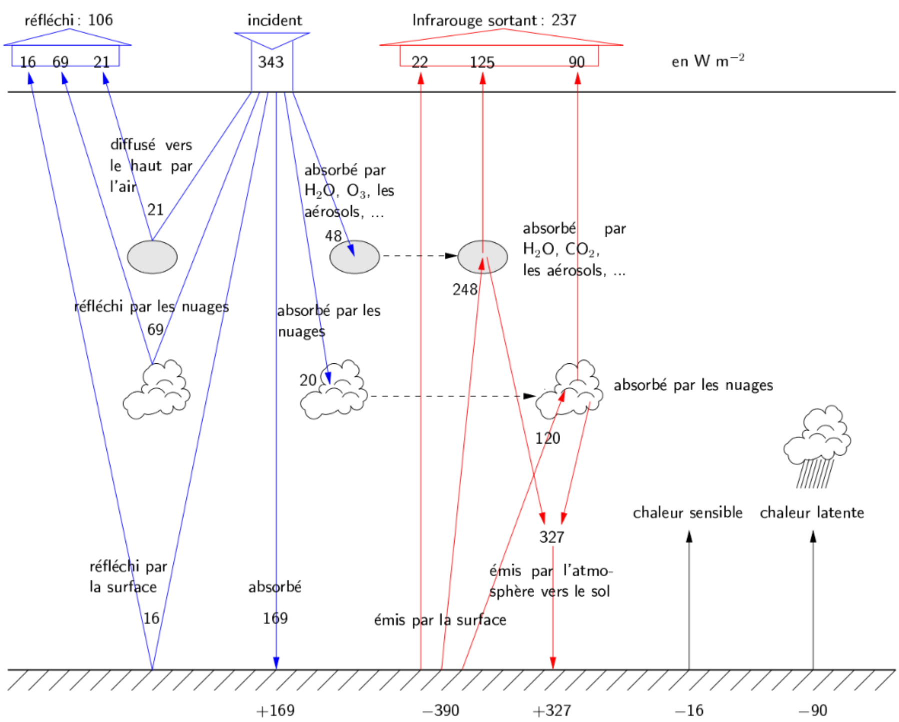
Le flux s'exprime en $W.m^2$
σ est la constante de Stephan $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$
La température s'exprime en Kelvin

Document 2 : Définition d'un corps noir.

Un corps noir est un corps qui absorbe, sans la réfléchir ni la diffuser, toute l'énergie électromagnétique qu'il reçoit. Ainsi, une boite avec une toute petite ouverture est généralement une bonne approximation d'un corps noir. Un tel "corps noir" reçoit de l'énergie, s'il n'en émettait pas, sa température augmenterait indéfiniment... Ceci est irréaliste, un corps noir réémet donc l'énergie qu'il a absorbée sous forme de rayonnements électromagnétiques. La quantité d'énergie réémise dépend de sa température. Ainsi, on a une "loi de rayonnement du corps noir" qui donne la valeur de l'énergie émise en fonction de la température du corps noir.

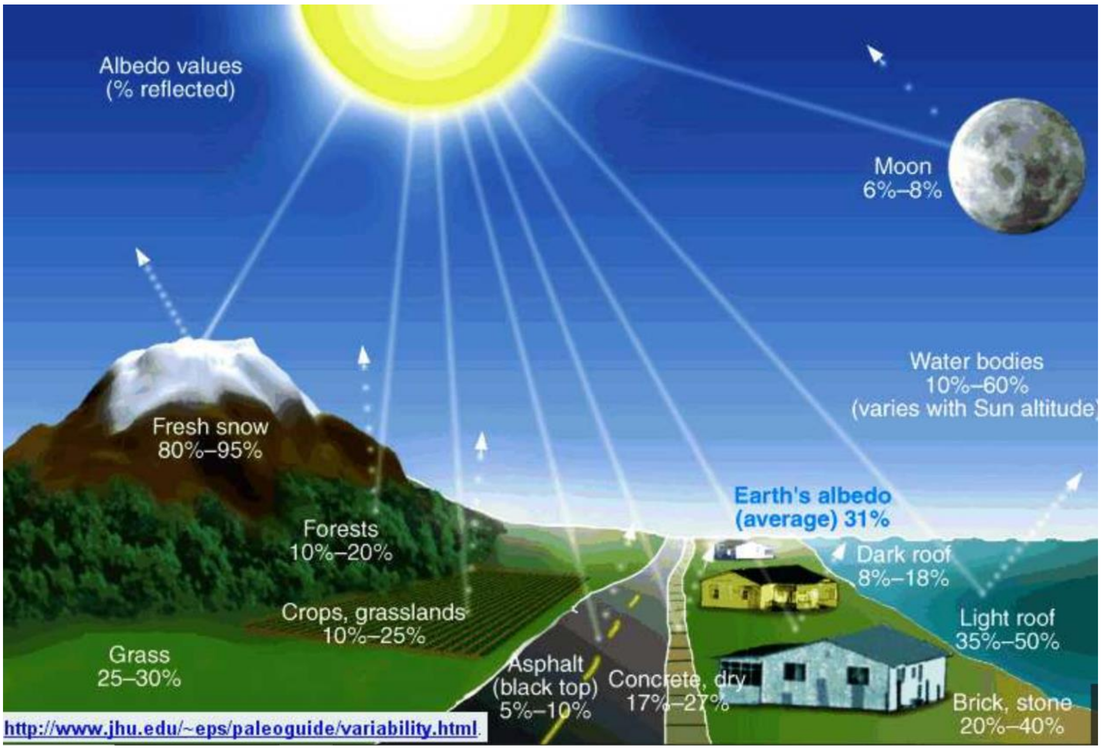
Document 3 : Bilan énergétique sur système Terre-Atmosphère

Le raisonnement du schéma suivant s'effectue sur une puissance radiative reçue sur la haute atmosphère de 343 W



Document 4 : Définition de l'albédo

L'albédo du système Terre-atmosphère est la fraction de l'énergie solaire qui est réfléchie vers l'espace. Sa valeur est comprise entre 0 et 1. Plus une surface est réfléchissante, plus son albédo est élevé. Les éléments qui contribuent le plus à l'albédo de la Terre sont les nuages, les surfaces de neige et de glace.

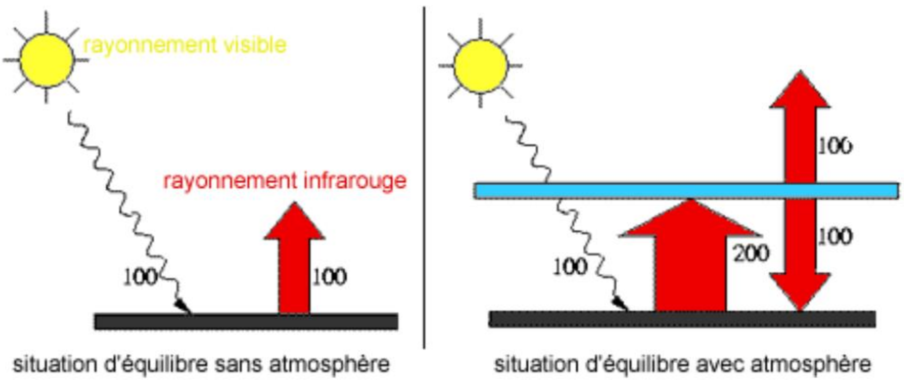


Document 5 : Définition de l'effet de serre.

Alors que la majorité de l'énergie solaire incidente est véhiculée dans les longueurs d'ondes visibles, la Terre émet essentiellement dans l'infrarouge. C'est ce rayonnement qui est absorbé par certains gaz de l'atmosphère, dit gaz à effet de serre. Une partie de cette énergie absorbée par l'atmosphère est renvoyée vers la surface de la Terre, ce qui augmente ainsi sa température.

Le terme d'« *effet de serre* » est employé par analogie avec ce qui se passe dans les serres des agriculteurs. L'atmosphère piège les infrarouges thermiques rayonnés par le sol de la même façon qu'une plaque de verre piège le rayonnement infrarouge émis par le sol et les plantes, augmentant ainsi la température du sol.

Malheureusement, l'analogie est trompeuse. Dans une serre, le réchauffement s'explique essentiellement par l'absence de convection (l'air chaud ne peut pas sortir) et non par l'absorption des radiations infrarouges.



<u>Question sur le Soleil et la Terre</u> : Comparer le flux thermique émis par le Soleil et celui émis par la Terre.

La température à la surface du Soleil est environ égale à $T =$ 6 000 K
La température moyenne terrestre est environ égale à $T =$ 288 K soit environ 27°C

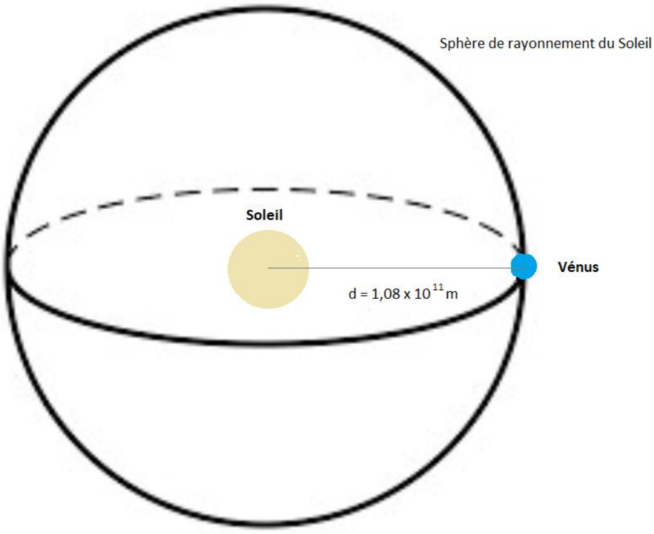
Calculer les flux thermiques respectifs du Soleil et de la Terre.
Interpréter.

<u>Réponses</u> :
$F_{émis} = \sigma \cdot T^4$
$F_{Soleil} = 6\,000^4 \times 5{,}67 \times 10^{-8} = 7{,}35 \times 10^7$ W/m^2
$F_{Terre} = 288^4 \times 5{,}67 \times 10^{-8} = 390$ W/m^2

La formule de Stefan est d'une importance capitale et rappelle que les flux ne sont fonction que de la température.
On note la forte dépendance en T puisqu'il s'agit d'une puissance quatrième.
Alors que la température du Soleil n'est que 20 fois plus élevée que celle de la Terre, son flux partant est 188 000 fois plus élevé.

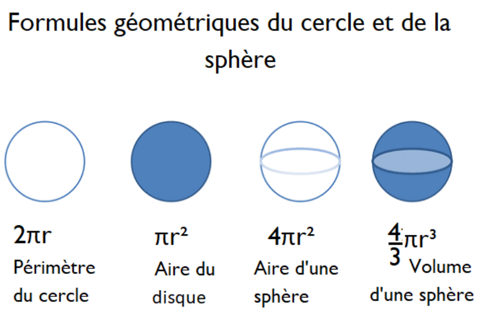
<u>Questions sur le Soleil et Vénus</u> : L'albédo de Vénus Source : Belin Terminale (adapté).

L'albédo n'est pas identique pour toutes les planètes du système solaire. Alors que celui de la Terre vaut 0,3, celui de Mercure vaut 0,12. On cherche à déterminer l'albédo de Vénus.



La distance entre le Soleil et vénus est égale à $d = 1{,}08 \times 10^{11}$ m
Le rayon de la planète Vénus est égal à $R_V = 6\,052$ km.
Expression de l'albédo : $\frac{Puissance\ diffusée}{Puissance\ totale\ reçue}$ Sa valeur est comprise entre 0 et 1.

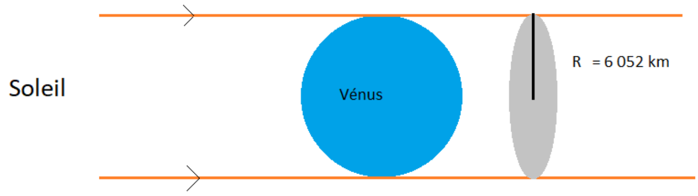
Rappels mathématiques :



1. Sachant que la puissance totale émise par le Soleil vaut 3,86 × 10^{26} W, calculez la puissance solaire par unité de surface (W.m^{-2}) reçue par Vénus.

   La puissance rayonnée par le Soleil se répartit sur une surface sphérique centrée sur le Soleil.
   La puissance reçue par unité de surface correspond à la puissance reçue pour un mètre carré soit :
   $P_{(S)} = \frac{P_{solaire}}{4\pi d^2} = \frac{3{,}86\times10^{26}}{4\pi\times(1{,}08\times10^{11})^2} = 2\,600$ W.m^{-2}

2. Calculer la puissance solaire totale reçue par Vénus.
   La puissance reçue par la planète Vénus correspond à l'aire du disque que forme son ombre quand elle intercepte les rayons solaires.



   La puissance solaire reçue par Vénus est égale à :
   $P_{reçue} = P_{solaire} \cdot S$
   $P_{reçue} = P_{solaire} \cdot \pi \cdot R_V^2 = 2\,600 \times \pi \times (6\,052\,000)^2 = 2{,}99 \times 10^{17}$ W

3. Sachant que la puissance diffusée par Vénus est égale à 2,27 × 10^{17} W, calculer son albédo.

1. Albédo de Vénus = $\frac{Puissance\ diffusée}{Puissance\ totale\ reçue} = \frac{2{,}27\times10^{17}}{2{,}99\times10^{17}} = 0{,}75$

4. Analyser en détail les valeurs du tableau suivant et comparer la valeur de l'albédo de Vénus aux valeurs d'albédo de la Terre (0,3) et de de Mercure (0,12). Interpréter ces valeurs.

On constate que la puissance solaire reçue par unité de surface et la température moyenne calculée diminuent quand la distance de la planète au soleil augmente.
Toutefois, on constate que la température moyenne mesurée ne suit pas ce modèle. Elle diffère de manière significative lorsque la planète possède une atmosphère.
La Terre possède une atmosphère épaisse et transparente, tandis que la Lune qui est à la même distance du Soleil, n'en possède pas. La température moyenne sur Terre est égale à 15°C tandis que celle sur la Lune est de -17°C.
L'atmosphère à un rôle d'effet de serre, ce qui permet la conservation d'une partie du rayonnement solaire reçu.

L'albédo de Vénus est supérieure à celle de la Terre. (0,75 > 0,3)
Ce phénomène est due à la nature de l'atmosphère de Vénus qui est épaisse et opaque, c'est-à-dire une partie importante du rayonnement solaire reçu est réfléchie.
L'atmosphère de la Terre étant plus transparente, la valeur de l'albédo est plus faible. Toutefois la surface terrestre réfléchie une partie du rayonnement solaire.
On constate que l'albédo de la planète Mercure est faible. Elle ne possède pas d'atmosphère réfléchissante et sa surface est sans doute peu réfléchissante.

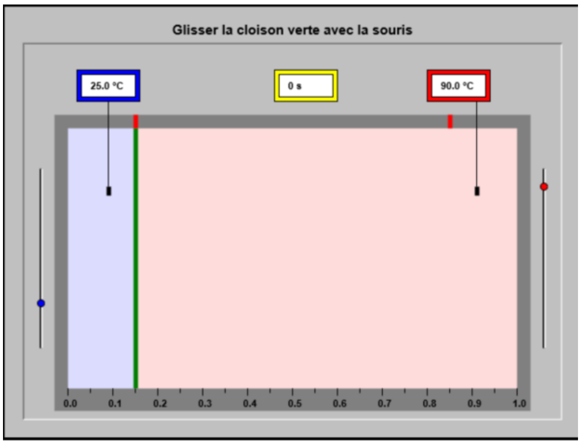
VII. Loi phénoménologique de Newton, modélisation de l'évolution de la température d'un système au contact d'un thermostat.

1. Loi de refroidissement de Newton (loi phénoménologique).

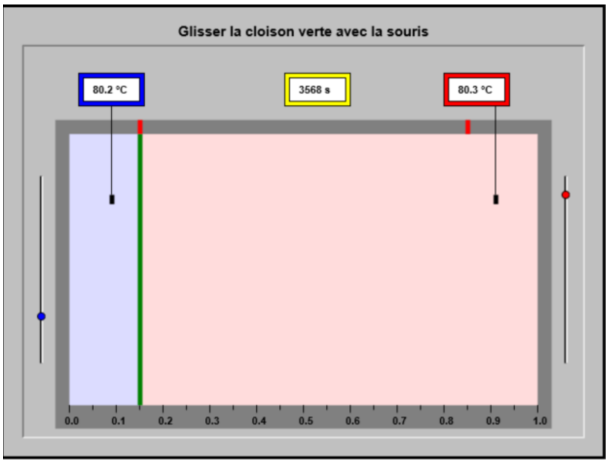
Animation : http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/thermo/newton.html

Expérience : De l'eau chaude à $T = 90$°C est versée dans un thermostat de température ambiante initiale $T_{ambiante} = 25$°C
Les parties bleue et rose représentent les masses respectives du thermostat et de l'eau.

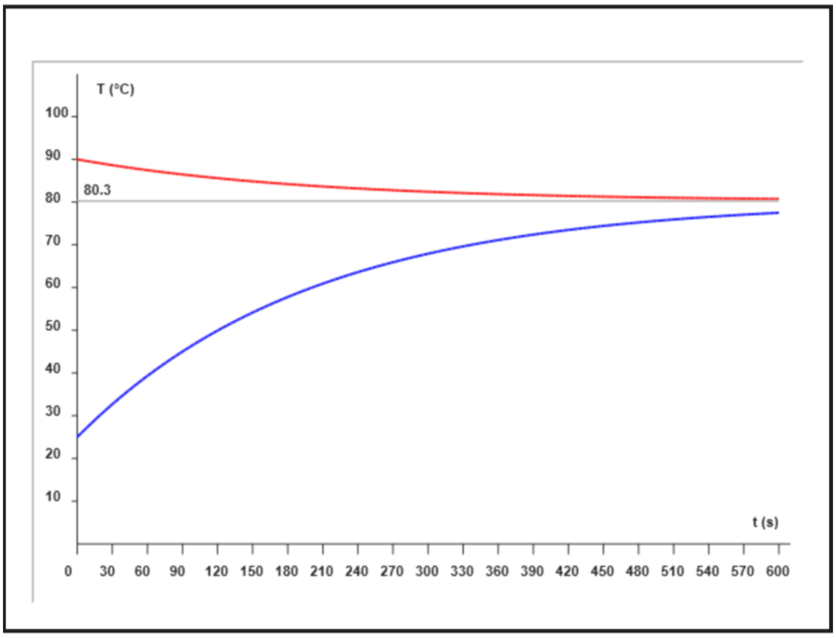
à *t* = 0



à *t* = 1 h environ



Courbes d'évolution de la température



Loi de refroidissement de Newton :

- Le taux de perte de chaleur d'un corps est proportionnel à la différence de température entre le corps et le milieu environnant.
- La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant.

http://maths.ac-creteil.fr/IMG/pdf/equas_diffs_et_refroidissement.pdf

On étudie le refroidissement d'un corps chauffé de masse *m* et de capacité thermique massique *c* à une température initiale élevée T_0 dans un milieu ambiant dont la température supposée constante est égale à T_{ambiante}.
La surface d'échange avec le milieu extérieur est égale à *S*

Etablissons l'équation différentielle traduisant la loi de Newton à partir du premier principe de la thermodynamique :

Considérons que le système est au repos alors son énergie mécanique ne varie pas ;
le 1er principe de la thermodynamique donne $\Delta U = W + Q$
On va considérer que le système n'échange pas de travail ainsi $W = 0$ et donc $\Delta U = Q$.
Donc $Q = \Delta U = m.c.\Delta T$ $\quad$ ΔT étant la variation de température entre l'étatfinal et l'état initial
Par définition du flux thermique, on a :$\Phi = \frac{Q}{\Delta t}$ avec $\Delta U = Q = m\,.\,c\,.\,\Delta T$
Alors on peut écrire $\Phi = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{m\,.c\,.\Delta T}{\Delta t}$

La loi de Newton dans l'air donne : $\Phi = h_{air}.S.(T_{ambiante} - T)$ $\quad$ **Expression donnée dans un énoncé**
h_{air} est le coefficient thermique surfacique dans l'air et *S* est la surface d'échange et *T*, la température du corps à une date donnée.
En égalant les deux expressions du flux , on obtient $\frac{m\,.c\,.\Delta T}{\Delta t} = h_{air}.S.(T_{ambiante} - T)$

$\Leftrightarrow \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{h_{air}.S.(T_{ambiante} - T)}{m\,.c}$

$\Leftrightarrow \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{h_{air}.S.T_{ambiante}}{m\,.c} - \frac{h_{air}.S.T}{m\,.c}$

$\Leftrightarrow \frac{\Delta T}{\Delta t} + \frac{h_{air}.S.T}{m\,.c} = \frac{h_{air}.S.T_{ambiante}}{m\,.c}$

On considère que l'étude s'effectue sur des intervalles de temps très petits, alors Δt tend vers 0 et on peut écrire $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{dT}{dt}$
Alors $\frac{dT}{dt} + \frac{h_{air}.S.T}{m\,.c} = \frac{h_{air}.S.T_{ambiante}}{m\,.c}$
En écrivant $k = \frac{h_{air}.S}{m.c}$, on obtient $\frac{dT}{dt} + k \cdot T = k \cdot T_{ambiante}$

La solution de l'équation différentielle est : $T = A \cdot e^{-kt} + B$ $\quad$ T_0 : température initiale du corps.

Expérience : https://owl-ge.ch/IMG/pdf/P117_18032003.pdf

1.5.2. Résolution de l'équation différentielle. (version courte)

Le problème à résoudre est donc le suivant : on cherche à déterminer l'expression de la température *T*(*t*) qui vérifie l'équation $\frac{dT(t)}{dt} + k \cdot T(t) = k \cdot T_{ambiante}$

La solution de cette équation s'écrit : $T = A \cdot e^{-kt} + B$

La constante *B* est déterminer quand *t* tend vers ∞
$e^{-kt} \rightarrow 0$ quand *t* tend vers ∞, alors $T = B$
Au bout d'une durée longue, la température tend vers la température ambiante de la pièce donc $B = T_{ambiante}$

La constante *A* est déterminée dans les conditions initiale quand *t* =0
On a $T_0 = A \cdot e^{-kt} + B$

Avec $B = T_{ambiante}$, on a $T_0 = A \cdot e^{-kt} + T_{ambiante}$

Quand $t = 0$, $T_0 = A \cdot e^{-k.0} + T_{ambiante}$
$\Leftrightarrow\ T_0 = A + T_{ambiante}$
$\Leftrightarrow\ A = T_0 - T_{ambiante}$

La solution complète de l'équation différentielle est donc : $\boldsymbol{T(t) = T_{ambiante}} + (T_0 - T_{ambiante}) \cdot \boldsymbol{e^{-kt}}$

L'équation différentielle traduisant la loi de Newton est : $\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_{ambiante})$ que l'on peut écrire également sous la forme : $\frac{dT}{dt} + k \cdot T = k \cdot T_{ambiante}$

La solution de l'équation différentielle est : $T = T_0 \cdot e^{-kt} + T_{ambiante}$ T_0 : température initiale du corps.

Expérience : https://owl-ge.ch/IMG/pdf/P117_18032003.pdf

1.5.2. Résolution de l'équation différentielle. (version complète)

Le problème à résoudre est donc le suivant : on cherche à déterminer l'expression de la température *T*(*t*) qui vérifie l'équation $\frac{dT(t)}{dt} + k \cdot T(t) = k \cdot T_{ambiante}$

La résolution s'effectue en deux étapes :
Etape n° 1 : Résolution de l'équation sans second membre, c'est-à-dire $\frac{dT(t)}{dt} + k \cdot T(t) = 0$ pour trouver la solution générale.
Etape n°2 : Détermination de la solution particulière de l'équation complète $\frac{dT(t)}{dt} + k \cdot T(t) = k \cdot T_{ambiante}$

<u>Etape n° 1</u> : Solution générale.

$\frac{dT(t)}{dt} + k \cdot T(t) = 0$
$\Leftrightarrow \frac{dT(t)}{dt} = -k \cdot T(t)$

$\Leftrightarrow \frac{dT(t)}{T(t)} = -k \cdot dt$

Par intégration, on peut écrire que :
$\int \frac{dT}{T} = \int -k \cdot dt$

$\Leftrightarrow \ln(|[T(t)]|) = -k \cdot t$ + constante
$\Leftrightarrow e^{[\ln(|[T(t)]|)]} = e^{[-k \cdot t + constante]}$
$\Leftrightarrow |[T(t)]| = e^{[-k \cdot t]} \cdot e^{[constante]}$

> Rappels mathématiques :
>
> si *f*(*x*)) = 5*x* +2 alors *f'*(*x*) = 5
>
> Réciproquement
> si *f'*(*x*) = 5 alors *f*(*x*)) = 5*x* +*K*
> *K* étant une constante à déterminer.
>
> La primitive de $\frac{1}{x}dx$ est $\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + K$
> $\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + K\ si\ x \neq 0$

On appelle *K* la constante correspondant au terme $e^{[constante]}$
On peut écrire que la solution générale de l'équation différentielle a pour expression $[T(t)] = K.e^{[-k \cdot t]}$.

où K est une constante à déterminer (dans les conditions initiales)

<u>Etape n° 2</u> : Solution particulière (quand *t* tend vers l'infini)
On cherche la solution particulière de l'équation $\frac{dT(t)}{dt} + k \cdot T(t) = k \cdot T_{ambiante}$
C'est-à-dire que l'on souhaite que la température soit égale à une température <u>constante</u> $T_{ambiante}$, alors $\frac{dT}{dt} = 0$
L'équation devient : $k \cdot T(t) = k \cdot T_{ambiante}$
Soit $T(t) = T_{ambiante}$
La solution de l'équation différentielle est donc : $\boldsymbol{T(t) = T_{ambiante} + K \cdot e^{-kt}}$

Il reste à déterminer la constante *K*.
Pour cela, on se place dans les conditions initiales : à t = 0 on a $T(0) = T_0$
$\Leftrightarrow T_{ambiante} + K \cdot e^{-kt} = T_0$
$\Leftrightarrow T_{ambiante} + K = T_0$ avec e^{-kt} = 1 quand t tend vers l'infini.
$\Leftrightarrow K = T_0 - T_{ambiante}$
La solution complète de l'équation différentielle est donc : $\boldsymbol{T(t) = T_{ambiante}} + (T_0 - T_{ambiante}) \cdot \boldsymbol{e^{-kt}}$

<u>Question</u> : Une barre de métal chauffée à 200° C est laissée à refroidir pendant 3 minutes dans un local dont la température ambiante est de 20° C. On constate alors que la température de la barre est de 80° C.
Dans combien de temps la température de la barre atteindra-telle 25° C ?

<u>Réponse</u> : La résolution nécessite de déterminer dans un premier temps la valeur de *k*, puis d'en déduire la durée nécessaire pour atteindre 25°C.

La température évolue selon l'équation : $T(t) = T_{ambiante} + (T_0 - T_{ambiante}) \cdot e^{-kt}$

$T_{ambiante}$ = 20°C
T_0 = 200 °C
$T(t)$ = 80°C

On détermine dans un premier temps, la valeur de la constante *k*

$80 = 20 + (200 - 20) \cdot e^{-k\times(3\times60)}$
$\rightleftharpoons e^{-k\times(3\times60)} = \frac{80-20}{200-20}$
$\rightleftharpoons e^{-k\times(3\times60)} = \frac{1}{3}$
$\rightleftharpoons -k \times (180) = Ln\left(\frac{1}{3}\right)$
$\rightleftharpoons k = -\frac{Ln\left(\frac{1}{3}\right)}{180}$
$\rightleftharpoons k = 6{,}1 \times 10^{-3}\ s^{-1}$

Dans un second temps, on détermine la durée nécessaire pour atteindre 25°C

$25 = 20 + (200 - 20) \cdot e^{-kt}$
$\rightleftharpoons e^{-kt} = \frac{25-20}{200-20}$
$\rightleftharpoons e^{-kt} = 0{,}02778$
$\rightleftharpoons -k \times t = Ln(0{,}02778)$
$\rightleftharpoons t = -\frac{Ln(0{,}02778)}{6{,}1\times10^{-3}}$
$\rightleftharpoons t$ = 587,45 s soit 9 min 47 s (pratiquement 10 min)